3.4 Accélération de la convergence des méthodes itératives via la méthode de Tchebychev (162, 206, 226) [6]

Si on veut résoudre un sysème linéaire du type $Ax = b$ dans $\mathbb{R}^d$ par une méthode itérative avec $A = M - N$, une relation de récurrence du type :

$$x_{k+1} = Bx_k + c$$

intervient, où $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$. Le but de la méthode d'accélération de la convergence est, à chaque itération, de construire un vecteur y_k censé être une "meilleure approximation" de $\overline{x} := A^{-1}b$ que x_k. On va essayer de chercher y_k sous la forme :

$$y_k = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} x_i,$$

avec $\left(a_i^{(k)}\right)_{0 \leq i \leq k} \in \mathbb{R}^k$ à déterminer. Étant donné que, dans une méthode itérative, lorsque $x_k = \overline{x}$, l'algorithme est fait pour que $x_{k+1} = x_k = \overline{x}$, on va imposer cette même condition : si $y_0 = x_0 = \overline{x}$, alors on veut avoir :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad y_k = \overline{x}.$$

On doit donc avoir :

$$\overline{x} = y_k = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} x_i = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} \right) \overline{x}.$$

D'où :

$$\sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} = 1.$$

En notant alors le vecteur d'erreur :

$$\varepsilon_k = y_k - \overline{x},$$

on a, étant donné que $x_k - \overline{x} = B^k(x_0 - \overline{x})$:

$$\varepsilon_k = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} x_i - \overline{x} = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} (x_i - \overline{x}) = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} B^i \right) \varepsilon_0\,!$$

Notons alors :

$$P_k = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} X^i$$

de sorte que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_k = P_k(B)\varepsilon_0.$$

On voudrait donc trouver le polynôme P_k de sorte que :

$$\sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)} = 1,$$

i.e. $P(1) = 1$ et tel que $\rho(P_k(B))$ soit minimal (afin d'améliorer le plus possible la convergence !)

On va se placer dans le cas où B n'a que des racines réelles et où la méthode itérative converge, i.e. $\rho(B) < 1$, mais askip le procédé peut se généraliser dans le cas où B peut avoir des racines complexes. Dans ce cadre, en notant $-1 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_d < 1$ les valeurs propres de B, on a :

$$\rho(P_k(B)) = \max_{1 \leq i \leq d} |P_k(\lambda_i)|.$$

Problème ! On ne connaît pas les valeurs propres en général... Pas d'inquiétude ! On va contourner le problème en imposant que P_k doive minimiser la quantité :

$$\max_{t\in[\lambda_1,\lambda_d]} |P_k(t)| = \|P_k\|_{\infty,[\lambda_1,\lambda_d]},$$

c'est-à-dire que P_k doit être solution du problème d'optimisation suivant :

$$\|P_k\|_{\infty,[\lambda_1,\lambda_d]} = \min_{Q\in K_k} \|Q\|_{\infty,[\lambda_1,\lambda_d]}.$$

où on a noté :

$$K_k = \{P \in \mathbb{R}_k[X] \mid P(1) = 1\}.$$

On a alors que P_k s'écrit en fonction des polynômes de Tchebychev !

Proposition 3.19.

1. Le n-ième Polynôme de Tchebychev $T_{n|[-1,1]}$ atteint ses extrema en les points :

$$x_i' = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad i \in [\![0,n]\!]$$

   et on a :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad T_n(x_i') = (-1)^i.$$

2. En notant, pour $a < b$ réels et $\alpha \notin [a,b]$, le polynôme :

$$P_{k,\alpha} = \frac{T_k\left(\frac{b+a-2X}{b-a}\right)}{T_k\left(\frac{b+a-2\alpha}{b-a}\right)},$$

   on a :

$$\|P_{k,\alpha}\|_{\infty,[a,b]} = \min_{Q\in K_{k,\alpha}} \|Q\|_{\infty,[a,b]},$$

   avec :

$$K_{k,\alpha} = \{P \in \mathbb{R}_k[X] \mid P(\alpha) = 1\}.$$

Démonstration. 1. On sait que pour $x \in [-1,1]$, on a :

$$T_n(x) = \cos(n\arccos(x)).$$

En particulier, on a :

$$\forall x \in [-1,1], \quad |T_n(x)| \leq 1$$

Ainsi :

$$T_n'(x) = n\frac{\sin(n\arccos(x))}{\sin(\arccos(x))}.$$

D'où :

$$T_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \cos\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad i \in [\![0,n]\!],$$

et on a :

$$T_n(x_i') = (-1)^i.$$

Ce sont donc des extrema.

2. Quitte à effectuer le changement de variable affine :

$$T = \frac{b + a - 2X}{b - a},$$

on peut se ramener au cas $a = -1$, $b = 1$ et donc $|\alpha| > 1$. Dans ce cas, on a :

$$P_{k,\alpha} = \frac{T_k(X)}{T_k(\alpha)}.$$

On a bien que $P_{k,\alpha}$ est bien défini car T_k a toutes ses racines dans $[-1, 1]$ (ce sont les $\cos\left(\frac{\pi(2i-1)}{2k}\right)$). Ainsi, $P_{k,\alpha} \in K_{k,\alpha}$ et :

$$\|P_{k,\alpha}\|_{\infty,[-1,1]} = \left|\frac{1}{T_k(\alpha)}\right|.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $Q \in K_{k,\alpha}$ tel que :

$$\|Q\|_{\infty,[-1,1]} < \left|\frac{1}{T_k(\alpha)}\right|.$$

Posons :

$$R = P_{k,\alpha} - Q.$$

R est donc de degré au plus k et, par définition de $K_{k,\alpha}$, s'annule en α. De plus, on a :

$$T_k(\alpha)R(x'_i) = T_k(x'_i) - T_k(\alpha)Q(x'_i) = (-1)^i - T_k(\alpha)Q(x'_i).$$

Or :

$$T_k(\alpha)Q(x'_i) \in (-1, 1)$$

par hypothèse. Donc $T_k(\alpha)R(x'_i)$ est du même signe que $(-1)^i$ pour tout $i \in [\![0, k]\!]$ et donc, par le TVI, R admet k racines distinctes, et en comptant α ça fait $k+1$. Or, R est de degré k. Donc $R = 0$! **ABSURDE !**

□

On a donc un candidat pour notre P_k :

$$P_k = \frac{T_k\left(\frac{\lambda_d + \lambda_1 - 2X}{\lambda_d - \lambda_1}\right)}{T_k\left(\frac{\lambda_d + \lambda_1 - 2}{\lambda_d - \lambda_1}\right)},$$

cependant, on ne connaît pas a priori λ_d et λ_1. Cependant, on sait que :

$$[\lambda_1, \lambda_d] \subset [-\rho(B), \rho(B)] \subset (-1, 1).$$

On prendra donc plutôt :

$$P_k = \frac{T_k\left(\frac{X}{\rho(B)}\right)}{T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)},$$

de sorte que :

$$\|P_k\|_{\infty,[-\rho(B),\rho(B)]} = \min_{Q \in K_k} \|Q\|_{\infty,[-\rho(B),\rho(B)]}.$$

Or, étant donné que les polynômes de Tchebychev vérifient une relation de récurrence d'ordre 2, on va pouvoir trouver une relation reliant y_{k+1} à y_k et y_{k-1}.

Théorème 3.20 (Accélération de Tchebychev)**.** Si $B \in \mathscr{H}_n(\mathbb{C})$, alors la méthode d'accélération de Tchebychev est définie par la relation de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_0 & = & x_0 \in \mathbb{R}^d, \\ y_1 & = & x_1 = Bx_0 + c, \\ y_{k+1} & = & \omega_{k+1}\left(By_k + c - y_{k-1}\right) + y_{k-1}, \quad k \geq 1, \end{array}\right.$$

avec :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \omega_1 & = & 1, \\ \omega_2 & = & \dfrac{2}{2-\rho(B)^2}, \\ \omega_{k+1} & = & \dfrac{4}{4-\rho(B)^2\omega_k}, \quad k \geq 2. \end{array}\right.$$

et on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\varepsilon_k\| \leq \frac{1}{\left|T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)\right|}\|\varepsilon_0\|.$$

Démonstration. Au vu de la relation de récurrence reliant les polynômes de Tchebychev :

$$\left\{\begin{array}{rcl} T_0 & = & 1, \\ T_1 & = & X, \\ T_{n+2} & = & 2XT_{n+1} - T_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

on a :

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = X$$

et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad T_{k+1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)P_{k+1} = \frac{2X}{\rho(B)}T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)P_k - T_{k-1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)P_{k-1}.$$

En utilisant que

$$\varepsilon_k = P_k(B)\varepsilon_0,$$

on obtient :

$$y_1 - \overline{x} = \varepsilon_1 = B\varepsilon_0 = B(y_0 - \overline{x}) = By_0 - \overline{x} + c$$

i.e.

$$y_1 = x_1 = Bx_0 + c$$

et :

$$T_{k+1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)\varepsilon_{k+1} = \frac{2}{\rho(B)}T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)B\varepsilon_k - T_{k-1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)\varepsilon_{k-1},$$

i.e.

$$y_{k+1} - \overline{x} = \frac{2T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)}{\rho(B)T_{k+1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)}\left(By_k - \overline{x} + c\right) - \frac{T_{k-1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)}{T_{k+1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)}\left(y_{k-1} - \overline{x}\right).$$

Avec l'égalité :

$$T_{k-1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right) = \frac{2}{\rho(B)}T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right) - T_{k-1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)$$

on obtient :

$$y_{k+1} - \overline{x} = \frac{2T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)}{\rho(B)T_{k+1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)}\left(By_k + c - y_{k-1}\right) + y_{k-1} - \overline{x}$$

et donc, en définitive :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad y_{k+1} = \omega_{k+1}(By_k + c - y_{k-1}) + y_{k-1},$$

avec :

$$\omega_1 = 1$$

et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \omega_{k+1} = \frac{2T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)}{\rho(B)T_{k+1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)}.$$

i.e.

$$\omega_2 = \frac{2}{\rho(B)}\frac{1}{\rho(B)\left(\frac{2}{\rho(B)^2} - 1\right)} = \frac{2}{2 - \rho(B)^2}$$

et

$$\forall k \geq 2, \quad \omega_{k+1} = \frac{2T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)}{\rho(B)\left(\frac{2}{\rho(B)}T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right) - T_{k-1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)\right)} = \frac{1}{1 - \frac{\rho(B)}{2}\frac{T_{k-1}\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)}{T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)}} = \frac{1}{1 - \frac{\rho(B)^2}{4}\omega_k} = \frac{4}{4 - \rho(B)^2\omega_k},$$

d'où la formule de récurrence énoncée ! En définitive, étant donné que :

$$\varepsilon_k = P_k(B)\varepsilon_0,$$

avec :

$$P_k(B) = \frac{T_k\left(\frac{B}{\rho(B)}\right)}{T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)},$$

on obtient :

$$\|\varepsilon_k\|_2 \leq \|P_k(B)\|_2\|\varepsilon_0\|_2 = \rho(P_k(B))\|\varepsilon_0\|_2 \leq \|P\|_{\infty,[-\rho(B),\rho(B)]}\|\varepsilon_0\|_2 = \frac{1}{\left|T_k\left(\frac{1}{\rho(B)}\right)\right|}\|\varepsilon_0\|_2.$$

Cela conclut donc la preuve ! $\square$